

9.1.3 Příklad: Letecká bitva o Anglii. V letecké bitvě o Anglii v roce 1940 bojovala na straně Anglie řada pilotů různých národností. Královské letectvo mělo letadla, která vyžadovala dva piloty. Někteří piloti spolu ovšem nemohli letět pro jazykové potíže nebo pro rozdílnost výcviku. Kolik letadel (tj. dvojic pilotů) může za těchto omezení vzlétnout najednou?

Tento problém by bylo možno řešit nalezením maximálního párování v grafu, jehož vrcholy jsou piloti a jehož hrany spojují piloty, kteří mohou letět spolu.

9.1.4 Příklad zahrádkářský. Představme si ovocnou zahradu, ve které je $2n$ stromků a jedna hromada hnoje. Naším úkolem je přivézt půl kolečka hnoje ke každému stromku. Abychom šetřili časem, chceme vždy vézt k některému stromku plné kolečko, polovinu jeho obsahu složit a pokračovat s poloprázdným kolečkem k jinému stromku. Kromě času chceme šetřit i silami a chceme, aby např. součet drah vykonaných s plným kolečkem byl co nejmenší.

Tuto úlohu lze převést na hledání nejlevnějšího perfektního párování v úplném grafu o $2n$ vrcholech. Každý vrchol odpovídá jednomu stromku. Cena hrany bude úměrná námaze spojené s jízdou plného kolečka k bližšímu z obou stromků, s následující jízdou poloprázdného kolečka ke druhému z nich a s návratem prázdného kolečka k hromadě hnoje. Je zřejmé, že každý stromek (vrchol) musí být zahrnut do přesně jedné jízdy, hrany odpovídající těmto jízdám musí tedy tvořit perfektní párování.

9.1.5 Cvičení. Jak byste řešili předchozí úlohu pro lichý počet stromků?

9.1.6 Příklad: Taneční. Předpokládejme, že v tanečních má každý hoch přesně k přítelkyň a každá dívka přesně k přátel, přičemž $k > 0$. Je možno uspořádat tanec, při kterém každý hoch i dívka tančí s některým ze svých přátel? (Zde poněkud nerealisticky předpokládáme, že vztah přátelství je symetrický.)

Vztah přátelství můžeme znázornit bipartitním grafem, v němž každý vrchol má stupeň k . V tomto grafu hledáme perfektní párování. Ukážeme, že za uvedených podmínek lze existenci perfektního párování zaručit.

9.1.7 Přiřazovací úloha. Klasická formulace přiřazovací úlohy, totiž přiřazování pracovních úkolů pracovníkům, byla uvedena v 8.2.5, str. 135. Kromě řady dalších přímých aplikací se přiřazovací úloha vyskytuje i jako podúloha při řešení složitějších úloh, viz např. úloha čínského pošťáka 10.3, str. 182, a problém obchodního cestujícího 12.4.4, str. 206.

Řešením přiřazovací úlohy se budeme zabývat v 9.4, str. 171.

9.1.8 Cvičení. Úlohu o nejlevnějším maximálním párování lze převést na úlohu o nejdražším párování změnou cen hran. Navrhněte způsob, jak to udělat.

9.1.9 Poznámka. Úlohy o párování můžeme chápat jako hledání soustavy disjunktních dvojic vrcholů. Podobné úlohy týkající se disjunktních trojic jsou podstatně obtížnější (NP-těžké). Znamená to např., že kdybychom v zahrádkářské úloze