

3. [Test nalezení cesty.] Je-li právě označovaný vrchol y volný, značkovácí procedura končí, je nalezena střídatá cesta s volnými krajními vrcholy. Je-li vrchol y párováním P nasycen, pokračujeme podle kroku 4.
4. [Značkování vzad.] Označujeme vrchol (ležící v množině X), který je spárován s vrcholem y , a pokračujeme podle kroku 2.

Jestliže takto upravená značkovácí procedura skončí, aniž našla střídatou cestu s volnými krajními vrcholy, pak stávající párování již je maximální. Důkaz tohoto důležitého tvrzení vyplývá z věty 9.2.3 nebo také z analogie s toky v sítích (věta 8.3.7).

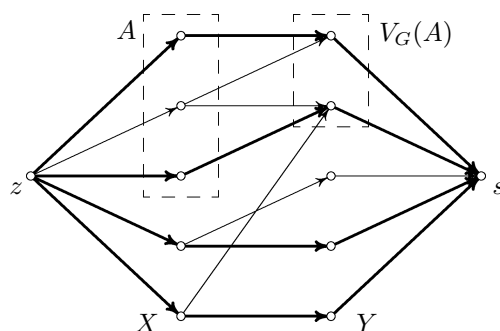
9.3.3 Königova věta. Buď dán bipartitní graf G se stranami X a Y . Počet hran v maximálním párování v grafu G je roven

$$(9.1) \quad \min_{A \subseteq X} (|X \setminus A| + |V_G(A)|) .$$

POZNÁMKA: Tato věta má pro párování v bipartitních grafech podobný význam jako Fordova-Fulkersonova věta 8.3.8 pro toky v sítích. Množinu A , pro kterou ve výrazu (9.1) nastává minimum, lze sestrojit pomocí značkovácí procedury.

DŮKAZ: Ke grafu G sestrojme transportní síť T podle 9.3.1.

Vezměme libovolnou množinu $A \subseteq X$ a uvažujme řez $W(Z)$ určený množinou vrcholů $Z = \{z\} \cup A \cup V_G(A)$. (Viz obr. 9.6.) Tento řez obsahuje $|X \setminus A|$ hran z množiny $E^+(z)$ a $|V_G(A)|$ hran z množiny $E^-(s)$. Tyto hrany mají jednotkové kapacity, ostatní hrany kapacitu řezu neovlivňují. Kapacita řezu $W(Z)$ je tedy rovna $|X \setminus A| + |V_G(A)|$. Proto žádné párování nemůže mít více než $|X \setminus A| + |V_G(A)|$ hran.



Obrázek 9.6: K důkazu Königovy věty.

Zbývá dokázat, že existuje množina $A \subseteq X$, pro kterou nastane rovnost. Podle Fordovy-Fulkersonovy věty 8.3.8 je velikost maximálního toku, tj. velikost párování, rovna kapacitě minimálního řezu. Dokážeme, že minimální řez má popsáný tvar $W(Z)$, kde $Z = \{z\} \cup A \cup V_G(A)$ pro nějakou množinu $A \subseteq X$.