

Uvažujme tedy některý maximální tok f a použijme na něj značkovací proceduru 8.3.5, str. 141. Výslednou množinu označovaných vrcholů označme Z a dále označme $A = X \cap Z$. (Viz obr. 9.6 na předchozí straně.)

Uvažujme libovolný vrchol $x \in A$. Jestliže vrcholem x neprotéká žádný tok, pak vrchol x byl označován po hraně ze zdroje z a určité jsou označovány všechny vrcholy množiny $V_G(x)$. Jestliže vrcholem x tok protéká, pak vrchol x nemohl být označován po hraně ze zdroje (neboť je nasycena tokem), musel tedy být označován po (jediné) hraně, kterou tok z vrcholu x odtéká. Pak ovšem musel být koncový vrchol této hrany označován dříve než x . Ostatními hranami z $E^+(x)$ tok neteče, proto jejich koncové vrcholy jsou jistě označovány (kdyby nebyly, bylo by možno dále značkovat). Tím je dokázáno, že $V_G(A) \subseteq Y \cap Z$. Žádný vrchol z množiny $Y \setminus V_G(A)$ nemůže být označován, neboť do něj nevede žádná hrana z označovaného vrcholu (tj. z množiny A). Platí tedy

$$V_G(A) = Y \cap Z \quad \text{a} \quad Z = \{z\} \cup A \cup V_G(A),$$

a pro množinu A tedy nastává rovnost. $\square$

9.3.4 Hallova věta. Nechť G je bipartitní graf se stranami X a Y . V grafu G existuje párování, které nasycuje množinu X právě tehdy, když

$$(9.2) \quad \begin{array}{l} \text{množina } X \text{ neobsahuje žádný izolovaný vrchol a} \\ \text{pro každou množinu } A \subseteq X \text{ platí } |A| \leq |V_G(A)|. \end{array}$$

DŮKAZ: Pokud existuje párování nasycující množinu X , pak podmínka (9.2) triviálně platí. Zajímavá je pouze opačná implikace.

Z podmínky (9.2) plyne, že pro každou množinu $A \subseteq X$ platí $|X \setminus A| + |V_G(A)| = |X| - |A| + |V_G(A)| \geq |X|$. Podle Königovy věty je tedy počet hran v maximálním párování větší nebo roven $|X|$. Větší být ovšem nemůže, proto je roven $|X|$. $\square$

9.3.5 Věta. Jestliže v bipartitním grafu G se stranami X, Y pro každé $x \in X$ a každé $y \in Y$ platí $d(x) \geq d(y)$ a graf G má alespoň jednu hranu, pak v G existuje párování, které nasycuje všechny vrcholy množiny X .

DŮKAZ: Označme

$$d_X = \min_{x \in X} d(x) \quad \text{a} \quad d_Y = \max_{y \in Y} d(y).$$

Platí tedy $d_X \geq d_Y \geq 1$. Vezměme nyní libovolnou množinu $A \subseteq X$. O počtu hran v řezu $W(A)$ platí

$$|W(A)| \geq |A| \cdot d_X$$

a také

$$|W(A)| \leq |W(V(A))| \leq |V(A)| \cdot d_Y.$$

Odtud $|A| \cdot d_X \leq |V(A)| \cdot d_Y$, a poněvadž $d_X \geq d_Y$, platí $|A| \leq |V(A)|$. Toto platí pro libovolnou množinu $A \subseteq X$. Podle Hallovy věty tedy existuje párování, které nasycuje množinu X . $\square$