

9.3.6 Cvičení. Dokažte, že z předpokladů předchozí věty plyne, že $|X| \leq |Y|$. Charakterizujte grafy, pro které jsou splněny předpoklady věty a platí $|X| = |Y|$.

9.3.7 Cvičení. Pomocí předchozí věty dokažte, že v příkladu 9.1.6 (taneční) existuje řešení, tj. perfektní párování.

9.3.8 Věta. V každém bipartitním grafu, který má alespoň jednu hranu, existuje párování, které nasycuje všechny vrcholy s maximálním stupněm.

DŮKAZ: Označme k maximální stupeň vrcholu. Zřejmě $k > 0$. Graf doplníme novými hranami a vrcholy tak, aby byl bipartitní a všechny vrcholy měly stupeň k . V takto vzniklém grafu mají obě strany stejný počet vrcholů a podle věty 9.3.5 v něm existuje perfektní párování. Nyní ze zvětšeného grafu vypustíme všechny přidané hrany a vrcholy. Tím získáme párování v původním grafu. Toto párování nasycuje všechny vrcholy stupně k , neboť k nim nebyla přidána žádná hrana. $\square$

9.3.9 Věta. Necht v bipartitním grafu G se stranami X, Y existují dvě párování P_1, P_2 . Necht párování P_1 nasycuje množinu vrcholů $X_1 \subseteq X$ a párování P_2 nasycuje množinu $Y_2 \subseteq Y$. Potom existuje párování $P \subseteq P_1 \cup P_2$, které nasycuje obě množiny $X_1 \subseteq X$ i $Y_2 \subseteq Y$.

DŮKAZ: Označme G' faktor grafu G s množinou hran $P_1 \cup P_2$. V grafu G' mají všechny vrcholy stupeň 0, 1 nebo 2, komponenty souvislosti grafu G' jsou tedy izolované vrcholy, cesty a kružnice.

Položme $P = P_1$. Jestliže P nasycuje všechny vrcholy z Y_2 , pak P je hledané párování. Jestliže P nenasytuje některý vrchol $y \in Y_2$, pak vrchol y je krajním vrcholem cesty, která je komponentou souvislosti grafu G' . Tuto cestu můžeme pokládat za střídavou cestu vzhledem k párování P ; provedme změnu P podél této cesty. Nyní je vrchol y nasycen v P a všechny vnitřní vrcholy cesty také zůstávají nasyceny v P . Označme v druhý krajní vrchol cesty. Jestliže $v \in X$, pak je nyní vrchol y nasycen v P . Jestliže $v \in Y$, pak sice není nasycen v P , ale není toho třeba, neboť v tomto případě byl vrchol v nasycen pouze v P_1 , a tedy $v \notin Y_1$. Opakováním tohoto postupu budeme měnit párování P tak, že bude nasycovat stále větší počet prvků množiny Y_2 a zároveň celou množinu X_1 . $\square$

9.4 Přiřazovací úloha

Uvedeme tzv. maďarský algoritmus pro řešení přiřazovací úlohy, tj. pro hledání nejlevnějšího perfektního párování v úplném bipartitním grafu $K_{n,n}$, jehož hrany jsou ohodnoceny cenami. Algoritmus je založen na změnách cen, které nemají vliv na výsledné řešení.

9.4.1 Matice cen a její transformace. Buď G úplný bipartitní graf se stranami X, Y takový, že $|X| = |Y| = n$. Předpokládejme, že vrcholy obou stran X, Y jsou očíslovány čísly $1, 2, \dots, n$. Hrany grafu G můžeme bez újmy na obecnosti