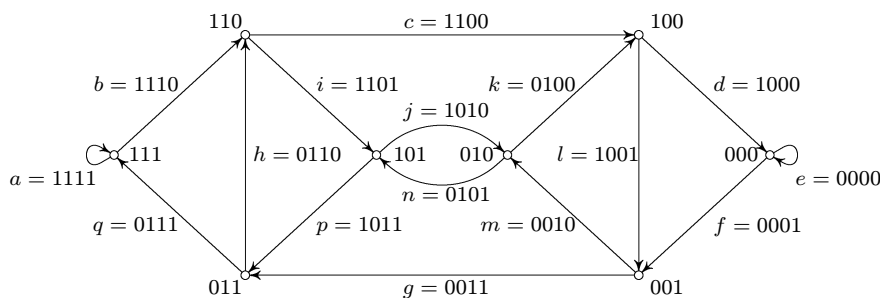


Vezměme graf, který má 2^{k-1} vrcholů, viz příklad na obr. 10.2 pro $k = 4$. Vrcholy označíme všemi $(k-1)$ -ticemi nul a jedniček. Graf bude mít 2^k hran označených všemi k -ticemi nul a jedniček, a to tak, že hrana označená $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$ povede z vrcholu $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ do vrcholu $(x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$. To znamená, že z každého vrcholu vychází přesně dvě hrany; jejich označení se liší pouze na posledním k -tém místě, jedna hrana tam má jedničku a druhá nulu. Podobně do každého vrcholu vchází dvě hrany, jejichž označení se liší v první číslici.



Obrázek 10.2: Graf pro konstrukci de Bruijnovy posloupnosti pro $k = 4$. Například eulerovskému tahu $abcdefghijklmnpq$ odpovídá de Bruijnova posloupnost 1111000011010010.

Libovolný sled v takovémto grafu můžeme snadno zakódovat pomocí posloupnosti nul a jedniček: každá číslice vyjadřuje jednu ze dvou možností jak pokračovat z daného vrcholu, který je označen předcházející $(k-1)$ -ticí.

Původní úloha o de Bruijnově posloupnosti je tedy převedena na hledání uzavřeného orientovaného eulerovského tahu v popsaném grafu. Tento graf je souvislý a pro každý jeho vrchol x platí $d^+(x) = d^-(x)$, proto podle věty 10.2.2 požadovaný eulerovský tah existuje. Dokonce je zřejmé, že eulerovských tahů (a tedy i de Bruijnových posloupností) může existovat několik.

Ve výše uvedené úloze jsme použili abecedu o dvou symbolech, totiž $\{0,1\}$. Výše popsanou konstrukci lze snadno zobecnit i pro libovolnou větší abecedu. Má-li abeceda n prvků, bude mít de Bruijnova posloupnost délku n^k .

10.1.6 Cvičení. Najděte de Bruijnovu posloupnost pro $k = 3$ a $n = 2$. Kolik takových posloupností je? Řešte tutéž úlohu pro $k = 2$ a $n = 3$.

10.2 Existence a hledání eulerovských tahů

10.2.1 Věta. (Euler 1736.) Nechť graf G je souvislý. Pak v grafu G existuje neorientovaný uzavřený eulerovský tah právě tehdy, když každý vrchol grafu G má sudý stupeň.

DŮKAZ je téměř shodný s důkazem následující věty 10.2.2. Proto obě věty dokážeme společně. $\square$