

POZNÁMKA: Právě uvedený algoritmus je rychlý a je vhodný pro první odhad barevnosti. Algoritmus 13.2.1 pro obarvení grafu nejmenším počtem barev vychází z obarvení získaného touto metodou. Viz také 13.2.7.

13.1.9 Věta. Pro graf G bez smyček o n vrcholech platí:

1. $\chi(G) \leq n$.
2. $\chi(G) \geq \omega(G)$.
3. $\chi(G) \alpha(G) \geq n$.
4. $\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$.

DŮKAZ: První tvrzení je zřejmé. Druhé tvrzení vyplývá z faktu, že všechny vrcholy kliky je nutno obarvit různými barvami. K důkazu třetího tvrzení si stačí uvědomit, že vrcholy obarvené stejnou barvou tvoří nezávislou množinu. Obarvíme-li tedy graf $\chi(G)$ barvami, získáme $\chi(G)$ nezávislých množin, z nichž každá obsahuje nejvýše $\alpha(G)$ vrcholů. Odtud pak plyne nerovnost $\chi(G)\alpha(G) \geq n$.

K důkazu čtvrtého tvrzení obarvíme nejpočetnější nezávislou množinu první barvou. K obarvení zbývajících $n - \alpha(G)$ vrcholů zcela jistě stačí $n - \alpha(G)$ barev. Platí tedy $n - \alpha(G) + 1 \geq \chi(G)$, což je jen jiný zápis dokazované nerovnosti. $\square$

13.1.10 Věta. Nechť G je prostý graf bez smyček. Označme n počet vrcholů, m počet hran a h maximální stupeň vrcholu v grafu G . Dále označme $\lfloor x \rfloor$ a $\lceil x \rceil$ dolní a horní celou část čísla x , tj. nejbližší celé číslo takové, že $\lfloor x \rfloor \leq x$ a $\lceil x \rceil \geq x$. Potom o nezávislosti $\alpha(G)$ a barevnosti $\chi(G)$ platí:

1. $\alpha(G) \geq (2n - m)/3$, přičemž rovnost platí pouze pro úplný graf K_3 .
2. $\alpha(G) \geq n^2/(2m + n)$, přičemž rovnost platí pouze tehdy, když souvislé komponenty grafu G jsou úplné grafy téže velikosti.
3. $\alpha(G) \geq \lceil n/(h + 1) \rceil$.
4. $\chi(G) + \chi(-G) \leq n + 1$.
5. $\chi(G) \geq n^2/(n^2 - 2m)$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, je-li G úplným $\chi(G)$ -partitním grafem se stejně velkými stranami.
6. Vrcholy grafu G lze rozložit na $h + 1$ disjunktních nezávislých množin, z nichž každá má buď $\lfloor n/(h + 1) \rfloor$, nebo $\lceil n/(h + 1) \rceil$ vrcholů.

DŮKAZ lze najít v knize [Berge73]. $\square$

13.1.11 Věta. Pro libovolný graf G bez smyček platí:

1. $\chi(G) = 1$ právě tehdy, když graf G je diskretní.
2. $\chi(G) \leq 2$ právě tehdy, když graf G neobsahuje kružnici liché délky.
3. $\chi(G) \leq 2$ právě tehdy, když graf G je bipartitní.

DŮKAZ: První tvrzení je zřejmé. Dokážeme druhé tvrzení. K obarvení kružnice liché délky potřebujeme nejméně 3 barvy. Je-li tedy $\chi(G) \leq 2$, nemůže graf G takovou kružnici obsahovat. Naopak, nechť graf G neobsahuje kružnici liché

délky. Popíšeme, jak lze graf obarvit nejvýše dvěma barvami. (Je-li graf nesouvislý, obarvíme takto každou komponentu zvlášť.)

Zvolme pevně vrchol x . Vrcholy, které mají od vrcholu x lichou vzdálenost (ve smyslu počtu hran v nejkratší cestě), obarvíme barvou 1, vrcholy, které mají sudou vzdálenost (včetně vrcholu x) obarvíme barvou 2. Musíme dokázat, že takto získáme skutečně obarvení, tj. že žádné dva stejně obarvené vrcholy nejsou spojeny hranou.

Vezměme tedy dva libovolné vrcholy u, v , které mají oba lichou (oba sudou) vzdálenost od x . Mezi vrcholy u, v vede cesta sudé délky, která je tvořena částmi nejkratších cest z vrcholu u do x a z vrcholu x do v . Kdyby byly vrcholy u, v spojeny hranou, tvořila by tato hrana spolu s cestou z u do v kružnici liché délky. Sestrojili jsme tedy skutečně obarvení dvěma barvami.

Třetí tvrzení je snadné. Každé obarvení dvěma barvami určuje rozklad množiny $V(G)$ na množiny A, B takové, že $W(A) = W(B) = E(G)$, graf je tedy bipartitní. Naopak, je-li graf bipartitní, stačí obarvit každou z jeho stran jednou barvou. $\square$

13.1.12 Cvičení. Jakou barevnost má strom?

13.1.13 Věta. Rovinný graf bez smyček lze obarvit čtyřmi barvami.

POZNÁMKA: Tato věta je řešením kdysi slavného tzv. *problému čtyř barev*: Stačí čtyři barvy k obarvení libovolné politické mapy tak, aby žádné dva sousední státy nebyly vybarveny stejnou barvou?

O řešení tohoto problému se marně pokoušely řady matematiků i laiků přes 100 let. Od roku 1890 byl znám důkaz, že stačí pět barev. Důkaz pro čtyři barvy však byl nesmírně komplikovaný (pomocí počítače bylo nalezeno a vyšetřeno asi 1900 dílčích případů) a byl nalezen až v roce 1976.

DŮSLEDEK: Rovinný graf G bez smyček o n vrcholech má nezávislost $\alpha(G) \geq n/4$.

13.1.14 Věta. Pro každá dvě celá kladná čísla k a r existuje graf G , který má barevnost $\chi(G) = k$ a neobsahuje kružnici délky menší nebo rovné r .

POZNÁMKA: Tato věta vlastně říká, že existují grafy s vysokou barevností, které jsou „lokálně řídké“. Speciálním případem této věty je tvrzení, že grafy, které neobsahují trojúhelníky, mohou mít libovolně vysokou barevnost. Důkaz tohoto speciálního případu lze najít v knize [Nešetřil79].

13.1.15 Hranová barevnost. V některých aplikacích je vhodnější nebarvit vrcholy, ale hrany. U obarvení hran pak požadujeme, aby každé dvě hrany, které mají společný vrchol, byly obarveny různými barvami. *Hranová barevnost* (též *chromatický index*) je nejmenší počet barev, které stačí k obarvení hran. Hranovou barevnost budeme značit $\chi'(G)$.

Vyšetřování hranové barevnosti grafu G lze převést na vyšetřování (vrcholové) barevnosti v tzv. hranovém grafu: *Hranový graf* ∂G získáme takto: Za vrcholy grafu ∂G prohlásíme hrany původního grafu G . Dva vrcholy v hranovém grafu ∂G jsou spojeny hranou, jestliže jim odpovídající hrany původního grafu G měly společný vrchol.