4.2.5 Věta. Každý graf má napnutý les.

Důkaz je podobný jako 4.2.2: je-li v grafu kružnice, pak odstraněním některé její hrany se počet komponent souvislosti nezmění. Opakovaným trháním hran tedy dostaneme napnutý les. □

4.2.6 Věta. Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva vrcholy stupně 1.

Důkaz: Žádná cesta spojující dva vrcholy stromu nemůže mít větší počet hran než $|V(G) - 1|$. Vezměme tedy cestu C, která má ze všech cest největší počet hran. Označme x, y počáteční a koncový vrchol cesty C. Kdyby některý z těchto vrcholů (označme jej x) měl stupeň alespoň 2, vycházela by z vrcholu x další hrana e, která nepatří do cesty C. Její druhý krajní vrchol z nemůže ležet na cestě C, jinak by v grafu existovala kružnice. Bylo by tedy možné cestu C prodloužit o hranu e a vrchol z, což je spor, neboť C byla nejdelší. Proto vrcholy x a y mají stupeň 1. □

4.2.7 Věta. Každý strom o n vrcholech má přesně $n-1$ hran.

Důkaz: Větu dokážeme indukcí podle počtu vrcholů. Pro graf s 1, 2 nebo 3 vrcholy lze větu ověřit přímo. Předpokládejme tedy platnost věty pro stromy s k vrcholy a vezměme libovolný strom, který má $k+1$ vrcholů. Podle věty 4.2.6 má tento strom nějaký vrchol stupně 1. Odstraněním tohoto vrcholu a jediné hrany s ním incidentní získáme menší strom s přesně k vrcholy a ten podle indukčního předpokladu má přesně $k-1$ hran. Původní strom měl tedy $k+1$ vrcholů a k hran. □

Důsledek: Každý souvislý graf o n vrcholech má alespoň $n-1$ hran.

4.2.8 Věta. Každý les o n vrcholech a k komponentách souvislosti má přesně $n-k$ hran.

Důkaz: Označme $n_1, n_2, \ldots, n_k$ počty vrcholů v komponentách souvislosti daného lesa. Každá komponenta je stromem, podle věty 4.2.7 jsou tedy počty hran v těchto komponentách rovny $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, …, $n_k - 1$. Poněvadž $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, dostaneme sečtením počet hran v celém lese $n-k$. □

4.2.9 Vlastnosti stromů. Nechť G je graf s n vrcholy, $n \geq 1$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. G je strom.
2. G neobsahuje kružnici a má přesně $n-1$ hran.
3. G neobsahuje kružnici a má alespoň $n-1$ hran.
4. G je souvislý a má přesně $n-1$ hran.
5. G je souvislý a má nejvýše $n-1$ hran.
6. G je souvislý a odebráním kterékoli hrany přestane být souvislý.
7. G neobsahuje kružnici a po přidání libovolné hrany bude obsahovat přesně jednu kružnici.
8. Každá dvojice vrcholů je spojena přesně jednou neorientovanou cestou.