

5.1.3 Cvičení. Uvažujme následující graf: Vrcholy grafu jsou jednotlivé podmínky $1, 2, \dots, 8$ z věty 4.2.9, str. 59. Z vrcholu i do vrcholu j vede hrana, když v důkaze věty 4.2.9 je dokázána implikace $i \Rightarrow j$. Rozhodněte, zda tento graf je silně souvislý. Totéž proveďte s větou 5.3.4, str. 78. Nakreslete obrázky. Jaký je smysl silné souvislosti a silně souvislých komponent v těchto případech?

5.1.4 Vlastnosti silných komponent. Na množině vrcholů grafu G definujeme relaci $\sim$ předpisem

$$x \sim y \iff \text{existuje orientovaná cesta z } x \text{ do } y \text{ a také z } y \text{ do } x.$$

Velmi snadno lze ověřit, že takto definovaná relace $\sim$ je ekvivalencí (tj. je reflexivní, symetrická a tranzitivní, viz 1.12.6), a že tedy určuje na množině vrcholů rozklad na třídy ekvivalence (viz 1.12.7). Podgrafy, které jsou indukovány těmito třídami, jsou komponentami silné souvislosti (neboť jsou to maximální silně souvislé podgrafy).

Odtud okamžitě plyne, že každý vrchol grafu leží v přesně jedné komponentě silné souvislosti.

5.1.5 Věta. Hrana e je obsažena v nějakém cyklu právě tehdy, když oba její vrcholy (počáteční i koncový) leží v téže silně souvislé komponentě.

DŮKAZ: Vezměme libovolnou hranu e z vrcholu x do vrcholu y . Je-li $x = y$, tvoří sama hrana e cyklus. Je-li $x \neq y$ a leží-li x, y v téže silně souvislé komponentě, existuje orientovaná cesta z y do x . Tato cesta spolu s hranou e tvoří cyklus.

Je-li naopak hrana e obsažena v cyklu, pak tato hrana tvoří orientovanou cestu z x do y a ostatní hrany cyklu tvoří orientovanou cestu z y do x . Oba vrcholy x, y tedy leží ve stejné silně souvislé komponentě. $\square$

5.1.6 Důsledek. Graf je silně souvislý právě tehdy, když je (slabě) souvislý a když každá jeho hrana leží v nějakém cyklu.

5.1.7 Důsledek. Každá silně souvislá komponenta, která obsahuje alespoň dva různé vrcholy, obsahuje cyklus.

5.1.8 Kondenzace. Kondenzace grafu G je prostý orientovaný graf G' bez smyček takový, že platí:

1. Vrcholy grafu G' jsou všechny silně souvislé komponenty grafu G .
2. Vrcholy H_1, H_2 (tj. silně souvislé komponenty grafu G) jsou v grafu G' spojeny hranou z H_1 do H_2 právě tehdy, když $H_1 \neq H_2$ a v grafu G existuje hrana z některého vrcholu komponenty H_1 do některého vrcholu komponenty H_2 .

5.1.9 Věta. Kondenzace orientovaného grafu neobsahuje žádný cyklus.

DŮKAZ: Kondenzace (podle definice) neobsahuje smyčky. Kdyby kondenzace obsahovala cyklus procházející alespoň dvěma různými vrcholy (tj. silně souvislými