

5.3.3 Věta. V každém orientovaném grafu, který má kořen, existuje faktor, který je kořenovým stromem.

DŮKAZ: Vezmeme kořen grafu jako výchozí vrchol a použijme některý z algoritmů pro prohledávání grafů z kapitoly 3 s úpravou 3.1.4. Hrany obsažené v hodnotách ODKUD tvoří kořenový strom. (Srovnejte s důkazem tvrzení 4.2.11, str. 60.) $\square$

5.3.4 Věta. Nechť G je orientovaný graf s n vrcholy, $n \geq 1$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. G má kořen a je stromem.
2. G má kořen x a do každého vrcholu vede přesně jeden orientovaný sled z x (tj. z x do x vede pouze triviální sled).
3. G má kořen a po odstranění libovolné hrany již kořen nemá.
4. G má kořen x takový, že $d^-(x) = 0$ a pro každý jiný vrchol $y \neq x$ platí $d^-(y) = 1$.
5. G neobsahuje cyklus a obsahuje vrchol x takový, že $d^-(x) = 0$ a pro každý vrchol $y \neq x$ platí $d^-(y) = 1$.
6. G má kořen a neobsahuje kružnici.
7. G má kořen a má nejvýše $n - 1$ hran.

DŮKAZ: Důkaz se do značné míry opírá o analogickou větu 4.2.9, str. 59, která charakterizuje stromy.

$1 \Rightarrow 2$: Z vlastnosti kořene grafu plyne, že do každého vrcholu z něj vede alespoň jeden orientovaný sled. Kdyby tam vedly dva různé sledy, bylo by možno z nich vybrat kružnici (po jednom sledu vpřed, po druhém vzad, popř. část sledu, která je cyklem). To by ale byl spor s předpokladem, že graf G je strom.

$2 \Rightarrow 3$: Vezmeme libovolnou hranu e . Do jejího počátečního vrcholu u vede přesně jeden sled z kořene grafu, do jejího koncového vrcholu v také. To znamená, že onen jediný sled do vrcholu v obsahuje hranu e , jinak by existovaly sledy dva. Po odstranění hrany e již proto neexistuje žádný sled z kořene grafu do vrcholu v .

$3 \Rightarrow 4$: Z existence kořene plyne $d^-(y) \geq 1$ pro $y \neq x$. Kdyby pro nějaký vrchol y bylo $d^-(y) > 1$, existovaly by alespoň dvě hrany končící v y . Poněvadž do jejich počátečních vrcholů vedou sledy z kořene x , vrchol x by zůstal kořenem i po odstranění některé z hran končících v y . Tím je dokázáno, že $d^-(y) = 1$ pro všechna $y \neq x$. Kdyby nějaká hrana končila v kořeni x , bylo by ji možno odstranit, aniž by vrchol x přestal být kořenem. Z toho plyne, že $d^-(x) = 0$.

$4 \Rightarrow 5$: Z existence kořene plyne (slabá) souvislost. Z vlastností vstupních stupňů plyne, že graf G má přesně $n - 1$ hran. G je tedy stromem, a proto neobsahuje kružnici. Nemůže tedy obsahovat ani cyklus.

$5 \Rightarrow 6$: Vyjděme z libovolného vrcholu $y \neq x$ a procházejme grafem proti směru hran. Z každého vrcholu $z \neq x$ můžeme pokračovat pouze jedním způsobem, neboť $d^-(z) = 1$. Žádným vrcholem nemůžeme projít dvakrát, neboť graf neobsahuje cyklus. Naše cesta tedy končí ve vrcholu x , pro který platí $d^-(x) = 0$. Vrchol x je tedy kořenem grafu G .