Dokažte, že jazyk $L = \{0^k 1^j 0 \mid 0 \leq k \leq j\}$ nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$ není regulární.

1 Pumping lemmatem

Předpokládejme pro spor, že L je regulární. Pak podle PL existuje n s vlastnostmi podle PL. Vezměme slovo $u = 0^n 1^n 0 \in L$. Podle PL musí existovat slova x, y, z taková, že

1. $u = xyz$,
2. $|xy| \leq n$,
3. $|y| \geq 1$,
4. pro všechna $i \geq 0$ platí $xy^i z \in L$.

Platí $x = 0^p$ a $y = 0^q$ pro nějaké $p \geq 0$ a $q \geq 1$ a dále $z = 0^{n-p-q} 1^n 0$.

Pak ale pro $i = 2$ platí, že slovo $xy^i z = xyyz \notin L$, neboť na začátku tohoto slova je větší počet nul, než je počet následujících jedniček. To je spor se (4). Tedy jazyk L není regulární.

2 Nerodovou větou

Předpokládejme pro spor, že L je regulární. Pak podle NV existuje ekvivalence T na $\{0, 1\}^*$ taková, že

1. jazyk L je sjednocením některých (celých) tříd rozkladu podle T,
2. pro každá slova $u, v, w \in \Sigma^*$ platí $u\,T\,v \Rightarrow uw\,T\,vw$,
3. ekvivalence T má konečně mnoho tříd.

Vezměme nekonečnou množinu M všech slov tvaru $0^i 1$ pro všechna $i \geq 1$.

Podle (3) musí existovat $i < j$ takové, že $0^i 1\ T\ 0^j 1$. Pak podle (2) pak pro každé slovo w platí $0^i 1 w\ T\ 0^j 1 w$. Vezmeme slovo $w = 1^{(i-1)} 0$. Z podmínky (2) tedy vyplývá, že $0^i 1\ 1^{(i-1)} 0\ T\ 0^j 1\ 1^{(i-1)} 0$, takže po zjednodušení máme $0^i 1^i 0\ T\ 0^j 1^i 0$. Slova $0^i 1^i 0$ a $0^j 1^i 0$ tedy leží ve stejné ekvivalenční třídě ekvivalence T, označme tuto třídu U.

Platí ovšem $0^i 1^i 0 \in L$, ale také $0^j 1^i 0 \notin L$. To znamená, že jazyk L neobsahuje třídu U celou, ale jen její netriviální část. To je spor s podmínkou (1) z NV. To znamená, že ekvivalence T z NV pro jazyk L neexistuje a tedy jazyk L není regulární.

3 Nerodovou větou jinak

Předpokládejme pro spor, že L je regulární. Pak podle NV existuje ekvivalence T na $\{0,1\}^*$ taková, že

1. jazyk L je sjednocením některých (celých) tříd rozkladu podle T,
2. pro každá slova $u, v, w \in \Sigma^*$ platí $u \, T \, v \Rightarrow uw \, T \, vw$,
3. ekvivalence T má konečně mnoho tříd.

Vezměme množinu M všech slov tvaru 0^i1 pro všechna $i \geq 1$.

Dokážeme, že pro $i \neq j$ platí, že $0^i1 \not T \; 0^j1$. Kdyby totiž platilo $0^i1 \; T \; 0^j1$ pro $i < j$, pak by podle (2) z NV pro slovo $w = 1^{i-1}0$ muselo platit také $0^i11^{i-1}0 \; T \; 0^j11^{i-1}0$. To ale neplatí, protože $0^i11^{i-1}0 \in L$, zatímco $0^j11^{i-1}0 \notin L$, a to by byl spor s (1) z NV.

Platí tedy, že každá dvě různá slova z množiny M leží v různých rozkladových třídách ekvivalence T. Ekvivalence T tedy má nekonečně mnoho tříd, což je spor s (3). To znamená, že ekvivalence T z NV pro jazyk L neexistuje a tedy jazyk L není regulární.